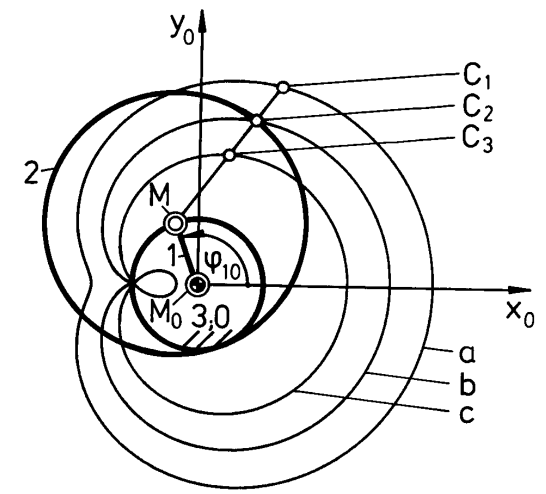
Institut für Getriebetechnik und Maschinendynamik
der RWTH Aachen

IGM-Getriebesammlung

Rädergetriebe zur Erzeugung Pascalscher Kurven 703

- Führungsgetriebe zur Umwandlung einer umlaufenden Drehung in eine spezielle Punktführung (Radlinie)
- Ebenes dreigliedriges Umlaufrädergetriebe



a)

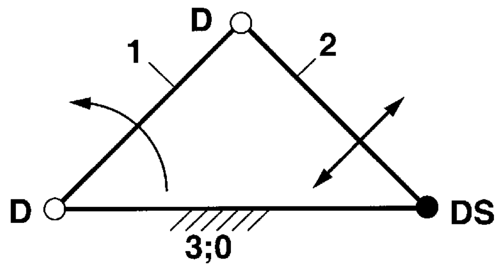
b)

Bild 1. Rädergetriebe zur Erzeugung Pascalscher Kurven

a) Kinematisches Schema mit Pascalschen Kurven

b) Getriebemodell

c) Strukturbild



c)

Symbole im Strukturbild:
D für Drehung **S** für Schiebung **W** für Schraubung (Windung) Antriebsgelenk; ⟷ Abtriebsglied
Beispiel **D_2S**: Gelenk mit dem Freiheitsgrad 3; 2 Drehungen, 1 Schiebung

Zugriffsmerkmale:

Anzahl der Antriebsgelenke	:	1, davon 1 im Gestell
Anzahl der Abtriebsglieder	:	1, davon 1 im Gestell
Anzahl der Glieder	:	3, davon 3 binär
Anzahl der Gelenke	:	3, davon 2 Drehgelenke (D), 1 Gleitwälzgelenk (DS)

Abmessungen (in Längeneinheiten)**:**

$r_2 = 2$ $r_3 = 1$ $r_1 = \overline{M_0M} = r_2 - r_3 = 1$

$c_1 = \overline{MC}_1 = \frac{4}{3} r_2$ $c_2 = \overline{MC}_2 = r_2$ $c_3 = \overline{MC}_3 = \frac{2}{3} r_2$

Erläuterung:

Bei dem vorliegenden Getriebe (**Bild 1**) handelt es sich um ein dreigliedriges ebenes Umlaufrädergetriebe der Bauform IA mit dem angetriebenen Steg 1, dem innenverzahnten Umlaufrad 2 (I) und dem feststehenden, außenverzahnten Mittelrad 3 (A). Punkte, die mit dem Umlaufrad verbunden sind, erzeugen Radlinien (Zykloiden). Wenn, wie im vorliegenden Fall, das Mittelrad 3 außenverzahnt ist, bezeichnet man die entstehenden Kurven allgemein als Epizykloiden (siehe Modellbeschreibung Nr. 701). Ist dabei das Umlaufrad 2 innenverzahnt, nennt man die Kurven auch Perizykloiden. Haben die beiden Räder das spezielle Radienverhältnis $r_2 : r_3 = 2 : 1$, liegt also ein Kardankreispaar vor, so werden die von dem Umlaufrad erzeugten Epizykloiden als Pascalsche Kurven bezeichnet (Bild 1a,b).

Je nach Lage des Punktes C auf dem Umlaufrad kann die Bahnkurve geschweift (verkürzt), gespitzt oder verschlungen (verlängert) sein. Geschweifte Radlinien ergeben sich, wenn von den beiden Punkten C und M_0 der eine innerhalb und der andere außerhalb des Wälzkreises des Umlaufrades 2 liegt (Kurve a). Die Bahnkurven sind gespitzt, wenn der Punkt C auf dem Wälzkreis des Umlaufrades liegt (Kurve b) und werden wegen ihrer Herzform auch Kardioiden genannt. Verschlungene Radlinien ergeben sich, wenn C und M_0 beide innerhalb oder beide außerhalb des Wälzkreises des Umlaufrades liegen (Kurve c). Die Schleifen bzw. Spitzen der Pascalschen Kurven sind nach innen gerichtet.

Autor: Prof. Dr.-Ing. G. Dittrich

Vorveröffentlichung in [1] und Erstveröffentlichung im Internet am 30.05.2000

Gleichungen der Pascalschen Kurven:

Mit dem speziellen Radienverhältnis $r_2/r_3 = 2/1$ bzw. $r_1/r_2 = 0{,}5$ ergeben sich die folgenden speziellen Gleichungen:

Ausgangslage: $\varphi_{10} = 0$, C auf der x_0-Achse,
$c > 0$: C und M_0 auf verschiedenen Seiten von M,
$c < 0$: C und M_0 auf der gleichen Seite von M.

$x_C = r_1 \cos\varphi_{10} + c \cos(0{,}5\ \varphi_{10})$;
$y_C = r_1 \sin\varphi_{10} + c \sin(0{,}5\ \varphi_{10})$.

Die Ableitungen nach dem Antriebswinkel φ_{10} sind

$x'_C = -\ r_1 \sin\varphi_{10} - 0{,}5\ c \sin(0{,}5\ \varphi_{10})$;

$y'_C = r_1 \cos\varphi_{10} + 0{,}5\ c \cos(0{,}5\ \varphi_{10})$;

$x''_C = -\ r_1 \cos\varphi_{10} - 0{,}25\ c \cos(0{,}5\ \varphi_{10})$;

$y''_C = -\ r_1 \sin\varphi_{10} - 0{,}25\ c \sin(0{,}5\ \varphi_{10})$.

Daraus lassen sich die Bahngeschwindigkeit

$$v_C = \sqrt{x'^2_C + y'^2_C} \cdot \omega_{10}$$

und die Bahnbeschleunigung

$$a_C = \sqrt{x''^2_C + y''^2_C} \cdot \omega^2_{10}$$

berechnen, wobei für die Bahnbeschleunigung die Antriebswinkelgeschwindigkeit $\omega_{10} = d\varphi_{10}/dt$ als konstant angenommen wurde.

Doppelte Erzeugung der Pascalschen Kurven:

Wie alle zyklischen Radlinien können auch die Pascalschen Kurven durch zwei verschiedene Grundrädergetriebe erzeugt werden. Sind die Abmessungen eines Grundrädergetriebes bekannt, so können die Abmessungen des Ersatzgetriebes entweder rechnerisch (siehe Modellbeschreibung Nr. 701) oder, wie in **Bild 2** für die geschweifte Kurve dargestellt, grafisch ermittelt werden.

Dazu wird im kinematischen Schema des ersten Getriebes (in Bild 2 gestrichelt gezeichnet) zunächst der momentane Geschwindigkeitspol P_{20} des Umlaufrades als Wälzpunkt mit dem feststehenden Mittelrad 3;0 ermittelt. Ergänzt man den Zweischlag M_0MC zu einem (Gelenk-)Parallelogramm, so liegt im neu gefundenen Eckpunkt der Mittelpunkt M* des neuen Umlaufrades 2*. Im Schnittpunkt der beiden Geraden $P_{20}C$ und M_0M^* liegt der momentane Geschwindigkeitspol P_{2*0} des Rades 2*. Dieser Pol ist der Wälzpunkt zwischen dem Mittelrad 3*;0 und dem Umlaufrad 2*. Man erkennt, dass die absoluten Abmessungen des zweiten Grundrädergetriebes von der Lage des die Radlinie erzeugenden Punktes C auf dem Umlaufrad abhängen (Abmessung $c = \overline{MC}$). Davon unabhängig ist jedoch das Radienverhältnis der Räder $r_{2*}/r_{3*} = 1/1$, wobei beide Räder außenverzahnt sind. Damit ist auch gezeigt, dass Perizykloiden tatsächlich Epizykloiden sind und nicht etwa davon grundsätzlich verschiedene Kurven, wie beispielsweise von Reuleaux angenommen wurde (siehe [3], S. 152).

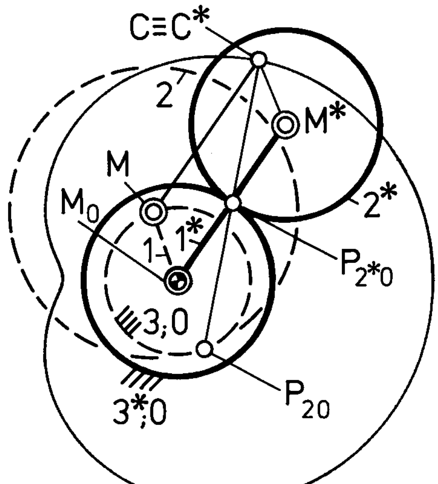


Bild 2. Ersatzrädergetriebe zur Erzeugung der gleichen geschweiften Pascalschen Kurve wie mit dem Getriebe nach Bild 1

Eigenschaften der Radlinien:

Aus dem Radienverhältnis von Umlaufrad 2 und Mittelrad 3;0 lassen sich Aussagen über die Eigenschaften der Radlinien gewinnen.

Die Radlinien sind geschlossene algebraische Kurven, wenn sich das Radienverhältnis $r_2/r_3 = p/q$ als eine rationale Zahl darstellen lässt, wobei p und q ganze Zahlen sind. Das ist bei Zahnradpaaren immer der Fall. Kürzt man diesen Bruch so weit, dass p und q teilerfremd sind – also im vorliegenden Fall $p/q = 2/1$ –, lassen sich für jede Kurve die folgenden Eigenschaften ablesen (vgl. Bild 1):

$q = 1$: - Die Kurve hat 1 Bogen.

$p = 2$: - Zur Erzeugung der vollständigen Kurve sind 2 Umläufe des Steges notwendig.
- Auf dem Umlaufrad gibt es jeweils 2 Punkte, die dieselbe Bahn durchlaufen.
- Bei der Bauform IA gilt für $r_2 > r_1$: Die Kurven umschreiben den Mittelpunkt M_0 $|p - q| = 1$ mal.

Für das Ersatzrädergetriebe (vgl. Bild 2) gilt mit $r_{2*}/r_{3*} = p^*/q^* = (p-q)/q$, also hier $p^*/q^* = 1/1$:

$q^* = 1$: - Die Kurve hat 1 Bogen.

$p^* = 1$: - Zur Erzeugung der vollständigen Kurve ist 1 Umlauf des Steges notwendig.
- Auf dem Umlaufrad gibt es 1 Punkt, der dieselbe Bahn durchläuft.
- Bei der Bauform AA gilt für $r_{2*} < r_{1*}$: Die Kurven umschreiben den Mittelpunkt M_0 $p^* = 1$ mal.

Literatur:

[1] Dittrich, G., Wehn, V.: Rädergetriebe zur Erzeugung Pascalscher Kurven. Der Konstrukteur 20 (1989) Nr. 9, S. 21/22.

[2] Dittrich, G., Braune, R: Getriebetechnik in Beispielen. 2. Auflage. München, Wien: Oldenbourg-Verlag 1987.

[3] Wunderlich, W.: Ebene Kinematik. Hochschultaschenbücher Band 447. Mannheim, Wien, Zürich: Bibliographisches Institut 1970.