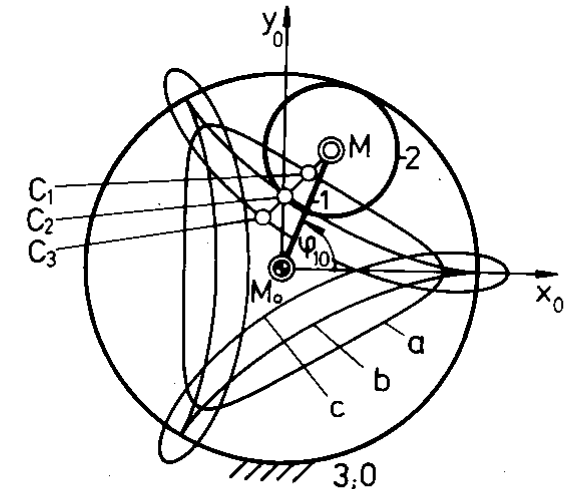
Institut für Getriebetechnik und Maschinendynamik
der RWTH Aachen

Rädergetriebe zur Erzeugung dreibogiger Hypozykloiden 706

- Führungsgetriebe zur Umwandlung einer umlaufenden Drehung in eine spezielle Punktführung (Radlinie)
- Ebenes dreigliedriges Umlaufrädergetriebe



a)

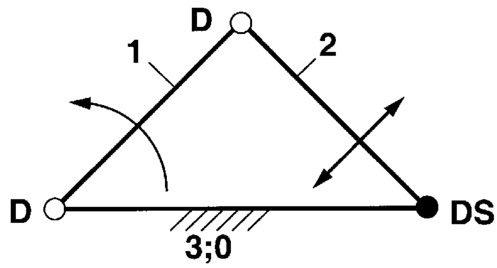
b)

Bild 1. Rädergetriebe zur Erzeugung dreibogiger Hypozykloiden

a) Kinematisches Schema mit Hypozykloiden

b) Getriebemodell

c) Strukturbild



c)

Symbole im Strukturbild:
D für Drehung **S** für Schiebung **W** für Schraubung (Windung) Antriebsgelenk; Abtriebsglied
Beispiel **D₂S**: Gelenk mit dem Freiheitsgrad 3; 2 Drehungen, 1 Schiebung

Zugriffsmerkmale:

Anzahl der Antriebsgelenke	: 1, davon 1 im Gestell
Anzahl der Abtriebsglieder	: 1, davon 1 im Gestell
Anzahl der Glieder	: 3, davon 3 binär
Anzahl der Gelenke	: 3, davon 2 Drehgelenke (D), 1 Gleitwälzgelenk (DS)

Abmessungen (in Längeneinheiten)**:**

$r_2 = 1$ $\quad r_3 = 3$ $\quad r_1 = \overline{M_0M} = r_3 - r_2 = 2$

$c_1 = \overline{MC}_1 = \frac{1}{2} r_2$ $\quad c_2 = \overline{MC}_2 = r_2$ $\quad c_3 = \overline{MC}_3 = \frac{3}{2} r_2$

Erläuterung:

Bei dem vorliegenden Getriebe (**Bild 1**) handelt es sich um ein ebenes dreigliedriges Umlaufrädergetriebe der Bauform AI mit dem angetriebenen Steg 1, dem außenverzahnten Umlaufrad 2 (A) und dem feststehenden innenverzahnten Mittelrad 3 (I).
Punkte, die mit dem Umlaufrad verbunden sind, erzeugen Radlinien (Zykloiden), die im vorliegenden Fall, bei dem das Umlaufrad im Inneren des Mittelrades abrollt, als Hypozykloiden bezeichnet werden (Bild 1a). Je nach Lage des Punktes C auf dem Umlaufrad kann die Bahnkurve geschweift (verkürzt), gespitzt oder verschlungen (verlängert) sein. Geschweifte Radlinien ergeben sich, wenn von den beiden Punkten C und M_0 der eine innerhalb und der andere außerhalb des Wälzkreises des Umlaufrades 2 liegt (Kurve a). Die Bahnkurven sind gespitzt, wenn der Punkt C auf dem Wälzkreis des Umlaufrades liegt (Kurve b). Verschlungene Radlinien ergeben sich, wenn C und M_0 beide innerhalb oder beide außerhalb des Wälzkreises des Umlaufrades liegen (Kurve c). Die Schleifen bzw. Spitzen der Radlinien sind bei Hypozykloiden nach außen gerichtet.

Literatur:

[1] Dittrich, G., Wehn, V.: Rädergetriebe zur Erzeugung dreibogiger Hypozykloiden. Der Konstrukteur 20 (1989) Nr. 6, S. 17/18.

[2] Dittrich, G. u. R. Braune: Getriebetechnik in Beispielen. 2. Auflage. München, Wien: Oldenbourg-Verlag 1987.

[3] Wunderlich, W.: Ebene Kinematik. Hochschultaschenbücher Band 447. Mannheim, Wien, Zürich: Bibliographisches Institut 1970.

Autor: Prof. Dr.-Ing. G. Dittrich

Vorveröffentlichung in [1] und Erstveröffentlichung im Internet am 30.05.2000

Gleichungen der Hypozykloide:

Ausgangslage: $\varphi_{10} = 0$, C auf der x_0-Achse,
$c > 0$: C und M_0 auf verschiedenen Seiten von M,
$c < 0$: C und M_0 auf der gleichen Seite von M.

$$x_C = r_1 \cos\varphi_{10} + c \cos\left(\frac{r_1}{r_2}\varphi_{10}\right) \quad ;$$

$$y_C = r_1 \sin\varphi_{10} - c \sin\left(\frac{r_1}{r_2}\varphi_{10}\right) \quad .$$

Daraus ergibt sich die Polarkoordinate $r_C = \overline{M_0C}$ zu

$r_C = \sqrt{x_C^2 + y_C^2}$.

Die Ableitungen nach dem Antriebswinkel φ_{10} sind

$$x'_C = -r_1 \sin\varphi_{10} - c\frac{r_1}{r_2}\sin\left(\frac{r_1}{r_2}\varphi_{10}\right) \quad ;$$

$$y'_C = \quad r_1 \cos\varphi_{10} - c\frac{r_1}{r_2}\cos\left(\frac{r_1}{r_2}\varphi_{10}\right) \quad ;$$

$$x''_C = -r_1 \cos\varphi_{10} - c\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \cos\left(\frac{r_1}{r_2}\varphi_{10}\right) \quad ;$$

$$y''_C = -r_1 \sin\varphi_{10} + c\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \sin\left(\frac{r_1}{r_2}\varphi_{10}\right) \quad .$$

Daraus lassen sich die Bahngeschwindigkeit

$v_C = \sqrt{x'^2_C + y'^2_C} \cdot \omega_{10}$

und die Bahnbeschleunigung

$a_C = \sqrt{x''^2_C + y''^2_C} \cdot \omega_{10}^2$

berechnen, wobei für die Bahnbeschleunigung die Antriebswinkelgeschwindigkeit $\omega_{10} = d\varphi_{10}/dt$ als konstant angenommen wurde.

Doppelte Erzeugung von Hypozykloiden:

Jede Hypozykloide kann durch zwei verschiedene Grundrädergetriebe erzeugt werden. Sind die Abmessungen eines Grundrädergetriebes bekannt, so können die Abmessungen des Ersatzgetriebes (**Bild 2**) nach den folgenden Beziehungen berechnet werden:

$$r_{2*} = c\frac{r_1}{r_2} \quad ; \qquad r_{1*} = \overline{M_0M*} = c \quad ;$$

$$r_{3*} = c\frac{r_3}{r_2} \quad ; \qquad c* = \overline{MC*} = r_1 \quad .$$

Man erkennt, daß die Abmessungen des zweiten Getriebes von der Lage des die Radlinie erzeugenden Punktes auf dem Umlaufrad abhängen, daß sich also für jede Radlinie ein anderes Getriebe ergibt. Hierbei ist für den gleichen Durchlaufsinn der Bahnkurve die Drehrichtung des Steges 1* entgegengesetzt zu dem des Steges des Ausgangsgetriebes. Hat, wie im vorliegenden Fall, das erste Grundgetriebe die Bauform AI mit $r_1 > r_2$, so hat das Ersatzgetriebe zur Erzeugung der gleichen Hypozykloide die Bauform AI mit $r_{1*} < r_{2*}$.

Die Abmessungen des zweiten Getriebes zur Erzeugung der gleichen gespitzten Hypozykloide (Bild 2) sind

$r_{1*} = 1$; $\quad r_{2*} = c* = 2$; $\quad r_{3*} = 3$; $\quad c* = 2$.

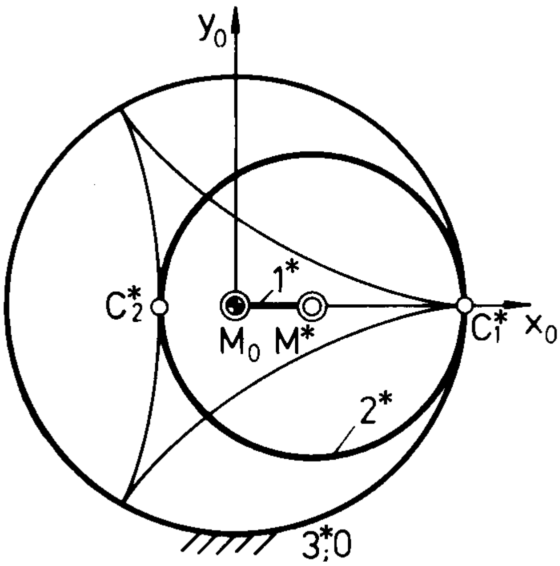


Bild 2. Ersatzrädergetriebe zur Erzeugung der gleichen gespitzten Hypozykloide wie mit dem Getriebe nach Bild 1

Eigenschaften der Radlinien:

Aus dem Radienverhältnis von Umlaufrad 2 und Mittelrad 3;0 lassen sich Aussagen über die Eigenschaften der Radlinien gewinnen.

Die Radlinien sind geschlossene algebraische Kurven, wenn sich das Radienverhältnis $r_2/r_3 = p/q$ als eine rationale Zahl darstellen läßt, wobei p und q ganze Zahlen sind. Das ist bei Zahnradpaaren immer der Fall. Kürzt man diesen Bruch so weit, daß p und q teilerfremd sind – also im vorliegenden Fall $p/q = 1/3$ -, lassen sich für jede Kurve die folgenden Eigenschaften ablesen (vgl. Bild 1):

$q = 3$: - Die Kurve hat 3 Bögen.

$p = 1$: - Zur Erzeugung der vollständigen Kurve ist 1 Umlauf des Steges notwendig.
- Auf dem Umlaufrad gibt es jeweils 1 Punkt, der dieselbe Bahn durchläuft.
- Bei der Bauform AI gilt für $r_1 < r_2$: Die Kurven umschreiben den Mittelpunkt M_0 $p = 1$ mal.

Für das Ersatzrädergetriebe (vgl. Bild 2) gilt mit $r_{2*} / r_{3*} = p* / q* = (q-p)/q$, also hier $p* / q* = 2/3$:

$q* = 3$: - Die Kurve hat 3 Bögen.

$p* = 2$: - Zur Erzeugung der vollständigen Kurve sind 2 Umläufe des Steges notwendig.
- Auf dem Umlaufrad gibt es jeweils 2 Punkte (C_1*, C_2*), die dieselbe Bahn durchlaufen.
- Bei der Bauform AI gilt für $r_{2*} > r_{3*}$: Die Kurven umschreiben den Mittelpunkt M_0 $|p* - q*| = 1$ mal.